

## 直线与圆 教师版

### 一、填空题

1. 直线  $l: 3x - y - 6 = 0$  被圆  $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$  截得的弦长为\_\_\_\_\_.

【答案】 $\sqrt{10}$

【难度】0.85

【来源】山东省菏泽市 2023-2024 学年高二上学期期末教学质量检测数学试题

【知识点】圆的弦长与中点弦

【分析】首先求圆心到直线的距离，再代入弦长公式.

【详解】圆  $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ ，圆心为  $(1, 2)$ ，半径为  $\sqrt{5}$ ，

圆心  $(1, 2)$  到直线  $l: 3x - y - 6 = 0$  的距离  $d = \frac{|3-2-6|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ，

所以弦长为  $2\sqrt{5 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \sqrt{10}$ .

故答案为： $\sqrt{10}$

2. 已知直线  $l: x - y + m = 0$  与圆  $M: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 6$  交于  $P, Q$  两点，且  $\triangle MPQ$  为正三角形，则  $m =$ \_\_\_\_\_

【答案】2 或 -4

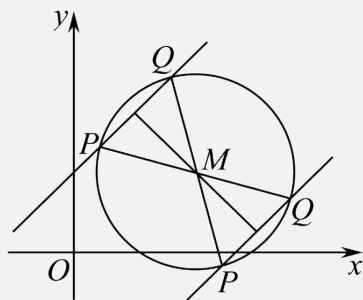
【难度】0.85

【来源】福建省泉州市安溪县 2023-2024 学年高二上学期 11 月期中考试数学试题

【知识点】由直线与圆的位置关系求参数、求点到直线的距离

【分析】根据圆的标准方程，明确圆心和半径，结合正三角形的性质求得其高，利用点到直线的距离公式，建立方程，可得答案.

【详解】



由题意得  $M(3, 2)$ ，圆  $M$  的半径为  $\sqrt{6}$ ，

正  $\triangle MPQ$  的高为  $\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，则点  $M$  到  $l$  的距离为  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 。

由  $\frac{|3-2+m|}{\sqrt{1+1}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，得  $m=2$  或  $-4$ 。

故答案为：2 或  $-4$ 。

3. 直线  $l$  经过点  $P(2, -3)$ ，与圆  $C: x^2 + y^2 + 2x + 2y - 14 = 0$  相交截得的弦长为  $2\sqrt{7}$ ，则直线  $l$  的方程为\_\_\_\_\_。

【答案】  $5x - 12y - 46 = 0$  或  $x = 2$

【难度】 0.85

【来源】 天津市北辰区 2023 届高三三模数学试题

【知识点】 已知圆的弦长求方程或参数、由圆的一般方程确定圆心和半径

【分析】 将圆的方程化为标准式，即可得到圆心坐标与半径，根据弦长求出圆心到直线的距离，分斜率存在与不存在两种情况讨论，分别求出直线方程。

【详解】 圆  $C: x^2 + y^2 + 2x + 2y - 14 = 0$ ，即  $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 16$ ，圆心为  $C(-1, -1)$ ，半径  $r = 4$ ，  
因为直线与圆相交截得的弦长为  $2\sqrt{7}$ ，

所以圆心到直线的距离  $d = \sqrt{4^2 - (\sqrt{7})^2} = 3$ ，

若直线的斜率不存在，此时直线方程为  $x = 2$ ，满足圆心  $C(-1, -1)$  到直线  $x = 2$  的距离为 3，  
符合题意；

若直线的斜率存在，设斜率为  $k$ ，则直线方程为  $y + 3 = k(x - 2)$ ，即  $kx - y - 2k - 3 = 0$ ，

则  $d = \frac{|-k+1-2k-3|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} = 3$ ，解得  $k = \frac{5}{12}$ ，所以直线方程为  $y + 3 = \frac{5}{12}(x - 2)$ ，即  $5x - 12y - 46 = 0$ ，

综上可得直线方程为  $5x - 12y - 46 = 0$  或  $x = 2$ 。

故答案为：  $5x-12y-46=0$  或  $x=2$

4. 已知直线  $l: 2x-y-2=0$  被圆  $C: x^2+y^2-2x+4y+m=0$  截得的线段长为  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 则  $m=$ \_\_\_\_\_.

【答案】 4

【难度】 0.85

【来源】 山西省运城市 2023 届高三三模数学试题 (A 卷)

【知识点】 已知圆的弦长求方程或参数、由圆的一般方程确定圆心和半径

【分析】 首先将圆的方程化为标准式, 即可得到圆心坐标与半径, 再求出圆心到直线的距离, 最后利用勾股定理计算可得.

【详解】 圆  $C: x^2+y^2-2x+4y+m=0$ , 即  $(x-1)^2+(y+2)^2=5-m$  圆心为  $C(1,-2)$ , 半径  $r=\sqrt{5-m}$ ,

则圆心  $C$  到直线  $l: 2x-y-2=0$  的距离  $d=\frac{|2\times 1-(-2)-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,

又直线被圆截得的线段长为  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 所以  $2\sqrt{r^2-d^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 即  $2\sqrt{5-m-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,

解得  $m=4$ .

故答案为: 4

## 二、填空题

5. 若直线  $kx-y-2k+3=0$  与圆  $x^2+(y+1)^2=4$  相切, 则  $k=$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{3}{4}$  / 0.75

【难度】 0.85

【来源】 天津市南开区 2023 届高三二模数学试题

【知识点】 已知切线求参数

【分析】 由圆心到切线的距离等于半径求解.

【详解】 由题意圆心为  $(0,-1)$ , 半径为 2,

所以  $\frac{|1-2k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=2$ , 解得  $k=\frac{3}{4}$ .

故答案为:  $\frac{3}{4}$ .

6. 已知圆  $C: x^2 + y^2 - 2ax + 4y + 4 = 0$  的圆心到直线  $l: 3x + 4y + 7 = 0$  的距离为 1, 则圆  $C$  截直线  $l$  所得弦长为\_\_\_\_\_.

【答案】  $2\sqrt{3}$  或  $\frac{2\sqrt{7}}{3}$

【难度】 0.85

【来源】 天津市新华中学 2023 届高三下学期统练 (3) 数学试题

【知识点】 由直线与圆的位置关系求参数、圆的弦长与中点弦、求点到直线的距离、圆的一般方程与标准方程之间的互化

【分析】 配方得圆  $C: (x-a)^2 + (y+2)^2 = a^2$  的圆心为  $C(a, -2)$ , 半径  $r = |a|$ , 利用点到直线距离公式求得  $a$  值, 利用勾股定理代入  $2\sqrt{r^2 - 1^2}$  可得弦长.

【详解】 由题意配方得, 圆  $C: (x-a)^2 + (y+2)^2 = a^2$  的圆心为  $C(a, -2)$ ,

圆心到直线  $l: 3x + 4y + 7 = 0$  的距离为  $d = \frac{|3a - 8 + 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3a - 1|}{5} = 1$ ,

解得  $a = 2$  或  $a = -\frac{4}{3}$ ,

当  $a = 2$  时, 半径为 2, 所以弦长为  $2\sqrt{2^2 - 1^2} = 2\sqrt{3}$ ,

当  $a = -\frac{4}{3}$  时, 半径为  $\frac{4}{3}$ , 所以弦长为  $2\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 1^2} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$ ,

故答案为:  $2\sqrt{3}$  或  $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ .

7. 已知直线  $x + y + 2 = 0$  与圆  $x^2 + y^2 + 2x - 2y + a = 0$  相切, 则满足条件的实数  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

【答案】 0

【难度】 0.85

【来源】 天津市河东区 2023 届高三一模数学试题

【知识点】 由直线与圆的位置关系求参数、求点到直线的距离

【分析】 先根据方程  $x^2 + y^2 + 2x - 2y + a = 0$  表示圆求出  $a$  的范围, 再由圆心到直线的距离等于半径求解即可.

【详解】解：因为方程  $x^2 + y^2 + 2x - 2y + a = 0$  表示圆，

所以  $4 + 4 - 4a > 0$ ，

解得  $a < 2$ ，

因为圆  $x^2 + y^2 + 2x - 2y + a = 0$  的圆心为  $(-1, 1)$ ，半径  $R = \frac{\sqrt{8-4a}}{2} = \sqrt{2-a}$ ，

又因为直线  $x + y + 2 = 0$  与圆  $x^2 + y^2 + 2x - 2y + a = 0$  相切，

所以圆心  $(-1, 1)$  到直线的距离  $d = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ，

所以  $R = \sqrt{2-a} = \sqrt{2}$ ，

解得  $a = 0$ ，满足  $a < 2$ 。

故答案为：0

8. 若过点  $(-2, 1)$  的直线  $l$  和圆  $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$  交于  $A, B$  两点，若弦长  $|AB| = 2\sqrt{3}$ ，则直线  $l$  的方程为\_\_\_\_\_。

【答案】  $3x + 4y + 2 = 0$  或  $x = -2$

【难度】 0.85

【来源】 天津市第二新华中学 2022-2023 学年高三上学期期末数学试题

【知识点】 已知圆的弦长求方程或参数、已知点到直线距离求参数、由圆的一般方程确定圆心和半径

【分析】

根据题意结合垂径定理求得  $d = 1$ ，再利用点到直线的距离公式运算求解，注意讨论直线的斜率是否存在。

【详解】由题意可知：圆  $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$  的圆心  $C(-1, -1)$ ，半径  $r = 2$ ，

设圆心  $C(-1, -1)$  到直线  $l$  的距离为  $d$ ，

若弦长  $|AB| = 2\sqrt{3}$ ，则  $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{4 - d^2} = 2\sqrt{3}$ ，可得  $d = 1$ ，

当直线  $l$  的斜率不存在时，即直线  $l$  为  $x = -2$ ，故圆心  $C(-1, -1)$  到直线  $l$  的距离为  $d = 1$ ，符合题意；

当直线  $l$  的斜率存在时，设为  $k$ ，则直线  $l$  为  $y - 1 = k(x + 2)$ ，即  $kx - y + 1 + 2k = 0$ ，

故圆心  $C(-1, -1)$  到直线  $l$  的距离为  $d = \frac{|-k+1+1+2k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} = \frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$ , 解得  $k = -\frac{3}{4}$

此时直线  $l$  为  $3x+4y+2=0$ ;

综上所述: 直线  $l$  为  $3x+4y+2=0$  或  $x=-2$ .

故答案为:  $3x+4y+2=0$  或  $x=-2$ .

9. 直线  $l$  过点  $(-4, 0)$  且与圆  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$  相切, 那么直线  $l$  的方程为\_\_\_\_\_.

【答案】  $x=-4$  或  $5x+12y+20=0$

【难度】 0.85

【来源】 天津市实验中学滨海学校 2022-2023 学年高二上学期期中数学试题

【知识点】 过圆外一点的圆的切线方程

【分析】 当直线  $l$  的斜率  $k$  不存在时, 直线  $l$  的方程为  $x=-4$ , 与圆相切, 成立; 当直线  $l$  的斜率  $k$  存在时, 设直线  $l$  的方程为  $kx-y+4k=0$ , 圆心  $C(-1, 2)$  到直线  $l$  的距离

$$d = \frac{|-k-2+4k|}{\sqrt{k^2+1}} = 3, \text{ 求出斜率 } k, \text{ 由此能出直线 } l \text{ 的方程.}$$

【详解】  $\because$  直线  $l$  过点  $(-4, 0)$  且与圆  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$  相切,

$\therefore$  圆  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$  的圆心  $C(-1, 2)$ , 半径  $r=3$ ,

当直线  $l$  的斜率  $k$  不存在时, 直线  $l$  的方程为  $x=-4$ , 与圆相切, 成立;

当直线  $l$  的斜率  $k$  存在时,

设直线  $l$  的方程为  $y=k(x+4)$ , 即  $kx-y+4k=0$ ,

$$\text{圆心 } C(-1, 2) \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{|-k-2+4k|}{\sqrt{k^2+1}} = 3,$$

$$\text{解得 } k = -\frac{5}{12}, \therefore \text{ 直线 } l \text{ 的方程为 } -\frac{5}{12}x - y - \frac{5}{3} = 0, \text{ 即 } 5x + 12y + 20 = 0.$$

综上, 直线  $l$  的方程为  $x=-4$  或  $5x+12y+20=0$ .

故答案为:  $x=-4$  或  $5x+12y+20=0$ .

10. 若过点  $P(-1, \sqrt{3})$  作圆  $x^2 + y^2 = 4$  的切线, 则切线方程为\_\_\_\_\_.

【答案】  $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$

【难度】 0.85

【来源】重庆市四川外语学院重庆第二外国语学校 2022-2023 学年高二上学期期中数学试题

【知识点】过圆上一点的圆的切线方程、点与圆的位置关系求参数

【分析】根据题意可得点  $P$  在圆  $x^2 + y^2 = 4$  上，根据切线的性质可得切线的斜率  $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，进而由点斜式求切线方程.

【详解】圆  $x^2 + y^2 = 4$  的圆心  $O(0,0)$ ，半径  $r = 2$ ，

$\because (-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$ ，则点  $P(-1, \sqrt{3})$  在圆  $x^2 + y^2 = 4$  上，

又  $\because$  直线  $OP$  的斜率  $k_{OP} = \frac{\sqrt{3}-0}{-1-0} = -\sqrt{3}$ ，则切线的斜率  $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

$\therefore$  切线方程为  $y - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$ ，即  $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$ ，

故切线方程为  $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$ .

故答案为： $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$ .

11. 若直线  $l: x - \sqrt{3}y + 9 = 0$  被圆  $C: x^2 + y^2 + 2x - m = 0$  截得线段的长为 6，则实数  $m$  的值为\_\_\_\_\_.

【答案】24

【难度】0.85

【来源】河南省焦作市 2022-2023 学年高三上学期定位考试理科数学试题

【知识点】已知圆的弦长求方程或参数、由圆的一般方程确定圆心和半径、求点到直线的距离

【分析】把圆的一般方程化为圆的标准方程，利用点到直线的距离公式以及勾股定理进行求解.

【详解】把圆  $C: x^2 + y^2 + 2x - m = 0$  化为标准方程有： $(x+1)^2 + y^2 = 1+m$ ，

所以圆心  $C(-1,0)$ ，半径  $r = \sqrt{1+m}$ ，又直线  $l: x - \sqrt{3}y + 9 = 0$ ，

所以圆心  $C$  到直线的距离为  $d = \frac{|-1-0+9|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = 4$ ，

因为直线  $l: x - \sqrt{3}y + 9 = 0$  被圆  $C: x^2 + y^2 + 2x - m = 0$  截得线段的长为 6，

根据勾股定理有： $d^2 + 3^2 = r^2$ ，解得  $r = 5$ ，

所以  $r = \sqrt{1+m} = 5$ ，解得  $m = 24$ .

故答案为：24.

12. 直线  $l$  经过点  $P(5, 5)$  且和圆  $C: x^2 + y^2 = 25$  相交，截得弦长为  $4\sqrt{5}$ ，则  $l$  的方程是\_\_\_\_\_.

【答案】  $x - 2y + 5 = 0$  或  $2x - y - 5 = 0$

【难度】 0.85

【来源】 沪教版（2020）选修第一册精准辅导第2章 2.1（3）直线与圆的位置关系

【知识点】 已知圆的弦长求方程或参数

【分析】 首先判断直线  $l$  的斜率是否存在，然后结合弦长、点到直线的距离公式、圆的几何性质求得直线  $l$  的方程.

【详解】 圆  $x^2 + y^2 = 25$  的圆心为  $(0, 0)$ ，半径  $r = 5$ .

若直线  $l$  的斜率不存在，则直线  $l$  的方程为  $x = 5$ ，

直线  $x = 5$  与圆  $x^2 + y^2 = 25$  相切，不符合题意，所以直线  $l$  的斜率存在，设为  $k$ ，

故直线  $l$  的方程为  $y - 5 = k(x - 5)$ ，即  $kx - y + 5 - 5k = 0$ ，

由于直线  $l$  与圆  $C$  相交所得弦长为  $4\sqrt{5}$ ，

所以圆心到直线  $l$  的距离  $d = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}$ ，

所以  $\frac{|5 - 5k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{5}$ ， $|5 - 5k| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{k^2 + 1}$ ， $\sqrt{5}|1 - k| = \sqrt{k^2 + 1}$ ，

两边平方得  $5(1 - k)^2 = k^2 + 1$ ，解得  $k = \frac{1}{2}$  或  $k = 2$ ，

所以直线  $l$  的方程为  $\frac{1}{2}x - y + 5 - \frac{5}{2} = 0$  或  $2x - y + 5 - 5 \times 2 = 0$ ，

即  $x - 2y + 5 = 0$  或  $2x - y - 5 = 0$

故答案为：  $x - 2y + 5 = 0$  或  $2x - y - 5 = 0$

13. 直线  $y = 2x + 1$  与圆  $C: x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$  相交于  $M, N$  两点，则  $|MN| =$ \_\_\_\_\_.

【答案】 4

【难度】 0.85

【来源】 河南省新未来 2022-2023 学年高三上学期 8 月联考文科数学试题

【知识点】 圆的弦长与中点弦、求点到直线的距离、圆的一般方程与标准方程之间的互化

【分析】 利用点到直线的距离公式求出圆心到直线的距离，再根据勾股定理求解.

【详解】解：圆  $C: (x-2)^2 + y^2 = 9$ ，其圆心坐标为  $(2,0)$ ，半径为 3.

圆心  $(2,0)$  到直线  $2x-y+1=0$  的距离  $d = \frac{|2 \times 2 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$ ,

则  $|MN| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{9 - 5} = 4$ .

故答案为:4.

14. 若直线  $x-y+m=0 (m>0)$  被圆  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3$  截得的弦长为  $m$ ，则  $m$  的值为\_\_\_\_\_.

【答案】2

【难度】0.85

【来源】2022 年高考天津卷（回忆版）数学真题

【知识点】已知圆的弦长求方程或参数

【分析】计算出圆心到直线的距离，利用勾股定理可得出关于  $m$  的等式，即可解得  $m$  的值.

【详解】圆  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3$  的圆心坐标为  $(1,1)$ ，半径为  $\sqrt{3}$ ，

圆心到直线  $x-y+m=0 (m>0)$  的距离为  $\frac{|1-1+m|}{\sqrt{2}} = \frac{m}{\sqrt{2}}$ ，

由勾股定理可得  $\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = 3$ ，因为  $m>0$ ，解得  $m=2$ .

故答案为：2.

15. 直线  $l: x-y-m=0$  被圆  $C: x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$  截得的弦长为  $4\sqrt{2}$ ，则  $m$  的值为\_\_\_\_\_.

【答案】1 或 9

【难度】0.85

【来源】天津市十二区县重点学校 2022 届高三下学期毕业班联考（一）数学试题

【知识点】已知圆的弦长求方程或参数

【分析】根据圆的弦长公式计算即可.

【详解】 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$ ，

圆心  $C(2,-3)$ ，半径  $r=4$ ，

圆心  $C$  到直线  $l$  的距离  $d = \frac{|2+3-m|}{\sqrt{2}} = \frac{|5-m|}{\sqrt{2}}$ ，

则  $2\sqrt{r^2 - d^2} = 4\sqrt{2}$ ，即  $16 - \frac{(5-m)^2}{2} = 8$ ，解得  $m = 9$  或  $1$ 。

故答案为：9 或 1。

16. 若直线  $l: x - my + 2 = 0$  被圆  $C: x^2 + y^2 + 2x = 0$  截得线段的长为  $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ，则实数  $m$  的值为\_\_\_\_\_。

【答案】 $\pm 2$

【难度】0.85

【来源】同心圆梦 2022 届全国统一招生考试信息押题卷（一）文科数学试题

【知识点】已知圆的弦长求方程或参数

【分析】求解圆心到直线的距离，结合圆的弦长公式求解即可。

【详解】圆  $C: x^2 + y^2 + 2x = 0$  的圆心坐标为  $(-1, 0)$ ，半径为 1，

圆心  $(-1, 0)$  到直线  $l: x - my + 2 = 0$  的距离  $d = \frac{|1 \times (-1) + (-m) \times 0 + 2|}{\sqrt{1 + (-m)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}$ 。

据题意，得  $\left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 1^2$ ，解得  $m = \pm 2$ 。

故答案为： $\pm 2$

17. 若圆  $x^2 + y^2 = 4$  与圆  $x^2 + y^2 + 2ax + 4ay - 9 = 0$  相交，且公共弦长为  $2\sqrt{2}$ ，则  $a =$ \_\_\_\_\_。

【答案】 $\pm \frac{\sqrt{10}}{4}$

【难度】0.85

【来源】天津市第一中学 2022 届高三下学期 4 月第四次月考数学试题

【知识点】相交圆的公共弦方程、已知圆的弦长求方程或参数

【分析】两个圆的方程相减可得公共弦所在直线方程，根据圆的弦长公式即可求  $a$  的值。

【详解】圆  $x^2 + y^2 = 4$  与圆  $x^2 + y^2 + 2ax + 4ay - 9 = 0$  的方程相减即为公共弦所在直线方程：

$2ax + 4ay - 5 = 0$ ，

圆  $x^2 + y^2 = 4$  圆心  $(0, 0)$  到公共弦距离  $d = \frac{5}{\sqrt{4a^2 + 16a^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{a^2}}$ ，

则公共弦长度为  $2\sqrt{2} = 2\sqrt{4 - d^2}$ ，解得  $a = \pm \frac{\sqrt{10}}{4}$ 。

故答案为： $\pm \frac{\sqrt{10}}{4}$ 。

18. 已知圆  $C: x^2 + y^2 = 20$ , 则过点  $P(4, 2)$  的圆的切线方程是\_\_\_\_\_.

【答案】  $2x + y - 10 = 0$

【难度】 0.85

【来源】 湖南省常德市第二中学 2020-2021 学年高二下学期期中数学试题

【知识点】 过圆上一点的圆的切线方程

【分析】 由点  $P$  在圆上, 因此利用切线和过切点的半径垂直得切线斜率后, 易得切线方程.

【详解】 由  $4^2 + 2^2 = 20$  知  $P$  在圆  $C$  上, 而  $C(0,0)$ ,  $k_{PC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ,

所以所求切线斜率为  $k = -2$ , 方程为  $y - 2 = -2(x - 4)$ , 即  $2x + y - 10 = 0$ .

故答案为:  $2x + y - 10 = 0$ .

19. 已知圆  $x^2 + y^2 + 2x - 2y + a = 0$  截直线  $x + y + 2 = 0$  所得弦的长度为 6, 则实数  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

【答案】  $-9$

【难度】 0.85

【来源】 天津市市区重点中学 2022 届高三下学期一模联考数学试题

【知识点】 已知圆的弦长求方程或参数

【分析】 求出圆心到直线的距离, 由勾股定理表示弦长, 从而可得参数值.

【详解】 圆标准方程是  $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2-a$ , 显然  $a < 2$ ,

圆心为  $(-1,1)$ , 圆心到已知直线的距离为  $d = \frac{|-1+1+2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ,

所以  $(\sqrt{2})^2 + 3^2 = 2-a$ , 解得  $a = -9$ ,

故答案为:  $-9$ .

20. 若直线  $3x + y - 6 = 0$  与圆  $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$  交于  $A, B$  两点, 则弦长  $|AB| =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $\sqrt{10}$

【难度】 0.85

【来源】 天津市红桥区 2021-2022 学年高三上学期期末数学试题

【知识点】 由圆的一般方程确定圆心和半径、求点到直线的距离、圆的弦长与中点弦

【分析】 先求出圆心和半径, 再求出圆心到直线的距离, 然后利用弦心距、弦和半径的关系可求得答案

【详解】由  $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$ ，得  $x^2 + (y-1)^2 = 5$ ，则圆心为  $(0, 1)$ ，半径为  $R = \sqrt{5}$ ，

圆心  $(0, 1)$  到直线  $3x + y - 6 = 0$  的距离为

$$d = \frac{|1-6|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$$\text{所以弦长 } |AB| = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{5 - \frac{10}{4}} = \sqrt{10},$$

故答案为：  $\sqrt{10}$